Exercice 1:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0;\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2) la droite $D_3 : y = 3$ est une asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

Pour x assez petit (au voisinage $-\infty$), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est au dessous de la droite $D_3 \Longrightarrow f(x) - 3 < 0$ (au voisinage de $-\infty$).

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 3 = 0 \\ \mathbf{V}(-\infty) : f(x) - 3 < 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{f(x)}^{3}}{\underbrace{(f(x)-3)}_{0}} = -\infty$$

La droite $\Delta : y = x+1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0.$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - x^2 + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 1 = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{(x^3 - x^2 + x)}^{+\infty}}{\underbrace{f(x) - x - 2}_{-1}} = -\infty.$$

3) Les droites $D_1 : x = -2$ et $D_2 : x = 2$ deux asymptotes verticales à droite et à gauche en 2 et -2 pour $(\mathscr{C}_f)$.

- $g(x) = \frac{1}{f(x)};\quad 2 \notin D_g$ et $-2 \notin D_g$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-2} g(x) = \lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{f(x)} = 0$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)} = 0$

$\Longrightarrow g = \frac{1}{f}$ est prolongeable par continuité en -2 et 2.

4) a) La fonction f est continue à droite en 0, alors la fonction h est continue à droite en 0 comme somme des fonctions continues à droite en 0.

D'où, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}((f(x))^2 - 4f(x) + x) = 4^2 + 4\times 4 + 0 = 0 = h(0).$

Par suite, la fonction h est continue à gauche en 0.

Ainsi h est continue en 0.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f^2(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (f^2(x) - 4f(x) + x) \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\underbrace{f^2(x)}_{+\infty} + 4\overbrace{f(x)}^{-\infty} + \underbrace{x}_{2} \right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \underbrace{f(x)}_{+\infty} \times \underbrace{(f(x) - 4)}_{+\infty} + \underbrace{x}_{2} = +\infty \end{cases}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} h(x) = +\infty.$

Interprétation:

$\lim\limits_{x\to 2} h(x) = +\infty$: La droite $D_2 : x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C}_h)$.

Exercice 2:

1ère Partie

1) a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+1}{x^2-2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\end{cases}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\overbrace{x^3-3x^2+1}^{-1}}{\underbrace{(x-1)^2}_{0}}\right) = -\infty.$

Interprétation:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$: La droite $\Delta : x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

2) a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}-(x-1)\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+1-(x-1)^3}{x^2-2x+1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-3x+2}{x^2-2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-3x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-3}{x}\right) = 0$

Interprétation:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x-1)\right) = 0$ La droite $D : y = x-1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infinie.

b) Pour $x \neq 1$, on pose $d(x) = f(x)-(x-1) = \frac{-3x+2}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0}}$.

Le signe de $d(x)$ est celui de $(-3x+2)$.

- $\left(d(x) = 0 \iff x = \frac{2}{3}\right) \iff (\mathscr{C}_f)\cap D.$
- $\left(d(x) < 0 \iff x > \frac{2}{3}\right) \iff$ La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est au dessous de la droite D.
- $\left(d(x) > 0 \iff x < \frac{2}{3}\right) \iff$ La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de la droite D.

3) $g(x) = \frac{x^3-3x^2+1}{(x-1)|x-1|} = \begin{cases} \frac{x^3-3x^2+1}{(x-1)^2} & si\, x \in]1,+\infty[\\ -\frac{x^3-3x^2+1}{(x-1)^2} & si\, x \in]-\infty,1[\end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\, x \in]1,+\infty[\\ -f(x) & si\, x \in]-\infty,1[\end{cases}$$

- Si $x \in]1,+\infty[$,
  La droite $D : y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $x \in]-\infty,1[$,
  La droite $\Delta : y = -(x-1) = -x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ au voisinage de $-\infty$.

2ème Partie

1)
- Si $a = 0$
  $f_a(x) = f_0(x) = \frac{-3x^2+3}{(x-1)^2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$
- Si $a \neq 0$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^3-3x^2+3-a}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} ax = \begin{cases} +\infty & si\, a>0 \\ -\infty & si\, a<0 \end{cases}$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \begin{cases} -3 & si\ a=0 \\ +\infty & si\ a>0 \\ -\infty & si\ a<0 \end{cases}$

2) a) $1 \notin \mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$: $f_a(x) = \frac{ax^3-3x^2+3-a}{(x-1)^2} = \frac{P(x)}{(x-1)^2}$

(La fonction f_a est prolongeable par continuité en 1)

$\Longleftrightarrow$ $(\lim\limits_{x\to1} f_a(x) \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow P(x)$ est factorisable par $(x-1)^2$

$\Longleftrightarrow P(x) = ax^3 - 3x^2 + 3 - a = \underbrace{(x-1)^2}_{(x^2-2x+1)}(ax+b)$

$\Longleftrightarrow P(x) = (x-1)^2(ax+3-a)$

$\Longleftrightarrow P(2) = 8a - 12 + 3 - a = 2a + 3 - a \Longleftrightarrow 6a = 12 \Longleftrightarrow a = 2.$

Ainsi, $x \neq 1$; $f_a(x) = f_2(x) = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{(x-1)^2} = 2x+1$

$\lim\limits_{x\to 1} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3.$

La fonction f_a est prolongeable par continuité en 1 $\Longleftrightarrow a = 2$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x^2+1}{(x-1)^2} & si x \neq 1 \\ 3 & si x = 1 \end{cases}$

Exercice 3:

1) • $r = OA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

• $\theta \in]-\pi, \pi]$, $\begin{cases} cos\theta = \frac{x_A}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{y_A}{r} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta \equiv \frac{-\pi}{6}[2\pi].$

D'où $A(r,\theta) = (2, \frac{-\pi}{6})$

• $r' = OB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

• $\theta' \in]-\pi, \pi]$, $\begin{cases} cos\theta' = \frac{x_B}{r'} = \frac{1}{2} \\ sin\theta' = \frac{y_B}{r'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta' \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$

D'où $B(r', \theta') = (2, \frac{\pi}{3})$

2) a)

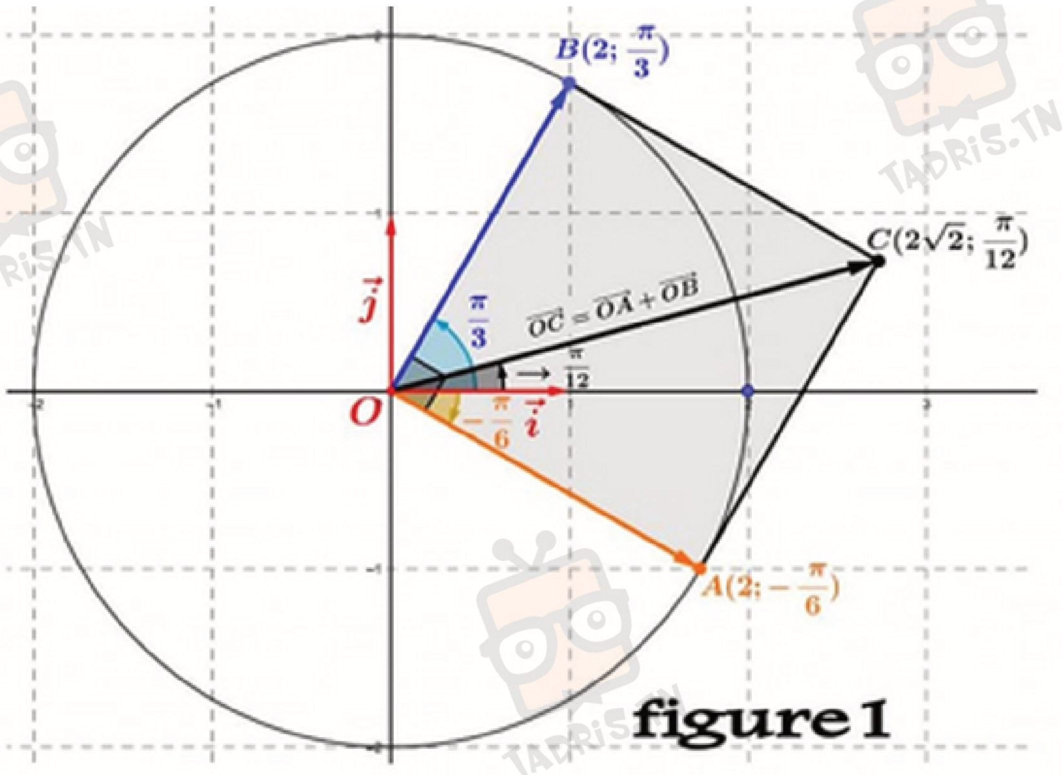

figure 1

b) O, A et B ne sont pas alignés et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Par suite, $OACB$ est un parrallèlogramme.

$OA = OB = 2$ donc $OACB$ est un loasange .

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB}}) \equiv -(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB}})$

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) a) $r = OC = OA\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (diagonale du carré $OACB$).

$\theta \in]-\pi, \pi]$, $\theta \equiv (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$

$\theta \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

D'où $C(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12})$

b) $$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

D'où $C(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$

$$\begin{cases} cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{x_C}{r} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{y_C}{r} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

4) a) $\frac{1-cos2x}{sin2x} = \frac{1-(1-2sin^2x)}{2sinx.cosx} = tanx$

b) $tan(\frac{\pi}{24}) = \frac{1-cos(2\times\frac{\pi}{24})}{sin(2\times\frac{\pi}{24})} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}$

Exercice 4:

1) a) $$\frac{sin4x}{x} = \frac{2sin2x.cos2x}{sinx}$$
$$= \frac{2 \times (2sinx.cosx)cos2x}{sinx}$$
$$= 4cosx.cos2x$$
$$= 4cosx.(2cos^2x - 1)$$
$$= 8cos^3x - 4cosx$$

b) $\frac{sin4x}{sinx} = 8cos^3x - 4cosx$

Pour $x = \frac{\pi}{5}$, on aura, $\frac{sin(4\times\frac{\pi}{5})}{sin\frac{\pi}{5}} = 8cos^3(\frac{\pi}{5}) - 4cos(\frac{\pi}{5})$.

Or $sin(\frac{4\pi}{5}) = sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = sin(\frac{\pi}{5})$

$\Longrightarrow 1 = 8cos^3(\frac{\pi}{5}) - 4cos(\frac{\pi}{5})$.

D'où, $8cos^3(\frac{\pi}{5}) - 4cos(\frac{\pi}{5}) - 1 = 0$.

2) a) $(2x+1)(4x^2-2x-1) = 8^3 - 4x^2 - 2x + 4x^2 - 2x - 1 = 8x^3 - 4x - 1$

b) $(8cos^3\frac{\pi}{5} - 4cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0) \Longleftrightarrow cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation:

$8x^3 - 4x - 1 = 0$.

$(8x^3 - 4x - 1 = (2x+1)(4x^2 - 2x - 1)$ et $cos\frac{\pi}{5} \neq \frac{-1}{2}$,

alors $cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $(E): 4x^2 - 2x - 1 = 0$

$(E): 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ou $x = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}_{<0}$

Donc $cos\frac{\pi}{5} > 0 \Longrightarrow cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

3) $\sqrt{5}cos\pi x - cos\pi x = 1 \Longleftrightarrow (\sqrt{5}-1)cos\pi x = 1 \Longleftrightarrow cos\pi x = \frac{1}{(\sqrt{5}-1)}$

$\Longleftrightarrow cos\pi x = \frac{(\sqrt{5}+1)}{4} = cos\frac{\pi}{5}$

$\Longleftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $\pi x = \frac{-\pi}{5} + 2k\pi$

$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{5} + 2k$ ou $x = \frac{-1}{5} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Par suite, $S_{]-1,2]} = \{\frac{-1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{9}{5}\}$

4) a) La courbe de $\mathscr{C}_f$ de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points M et N dont les abscisses X_M et x_N sont les solutions de l'équations de l'équation: $(E): 4x^2 - 2x - 1 = 0$.

Construction du point A':

$(x_N < 0 et x_M > 0) \Longrightarrow x_M = cos\frac{\pi}{5}$

$A'(1, \frac{\pi}{5}) \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow M$ est le projeté orthogonale de A' sur $(O, \vec{i})$.

b) $ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$

$\Leftrightarrow AB = BC = CD = DE = EA$ et $OA = OB = OC = OD = OE$

$\Leftrightarrow$ Les triangles OAB, OBC, OCD, ODE et OAE sont isocèles et isométriques.

Ainsi $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi] \Longrightarrow B = S_{(OA')}(A)$: la construction du pentagone s'en découle.

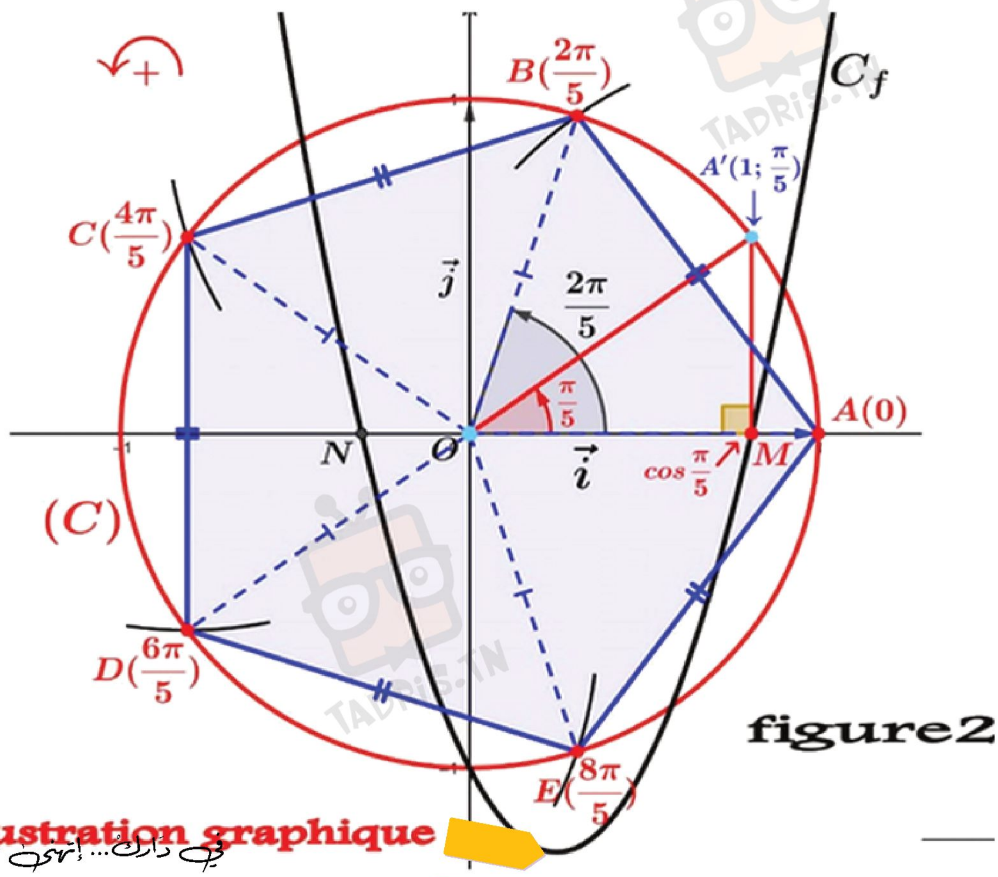

figure2

Illustration graphique